

REDES COMPLEJAS EN LA DINÁMICA SOCIAL
Maxi San Miguel, Raúl Toral y Víctor M. Eguíluz
Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados (IMEDEA), CSIC-UIB
Ed. Mateu Orfila, Campus Universitat Illes Balears, 07122-Palma de Mallorca

1. Introducción: Complejidad, fenómenos colectivos emergentes y redes sociales

Presentamos en este artículo dos ejemplos de complejidad social en los que discutiremos cómo la dinámica social viene condicionada por las redes de relaciones entre los agentes sociales que interactúan. Estos ejemplos, discutidos respectivamente en las secciones 2 y 3, se refieren al fenómeno de globalización cultural y al comportamiento gregario de agentes financieros. Como contexto general de esos dos ejemplos incluimos en esta introducción unas consideraciones generales, desde nuestra perspectiva de físicos, de lo que se entiende por complejidad y por *emergencia* en el estudio de fenómenos sociales colectivos. En general el fenómeno colectivo proviene de la interacción entre los individuos componentes del sistema, de donde emerge un comportamiento global con características distintas a los comportamientos individuales. La posibilidad de interacción viene determinada por una red y también incluimos aquí unos breves apuntes generales sobre las redes sociales complejas.

Complejidad

La Ciencia de los Sistemas Complejos aparece en múltiples foros como uno de los desafíos científicos más importantes (Solomon y Shir, 2003) y como el contexto natural para abordar los problemas de la sociedad del conocimiento dominada por las tecnologías de la información (Dum, 2003). En cuanto a su relación con la investigación interdisciplinar, afirma S. Solomon (2003): "*El ambicioso desafío de la investigación en complejidad (su destino manifiesto) es la prospectiva, cartografía, colonización y desarrollo del territorio interdisciplinar (que existe entre las ciencias tradicionales)*". Ocurre además que una característica esencial del estudio de sistemas complejos es la aparición de conceptos generales independientes del contexto. El resultado es que hay campos del saber que tienen el potencial de ser significativamente reformulados y transformados por la disponibilidad de estos nuevos conceptos. Algunos aspectos de las Ciencias Sociales son uno de esos campos de mayor oportunidad donde aparece una importante actividad transdisciplinar de científicos provenientes del campo de las Ciencias Físicas (Ball, 2003).

Para aclarar nuestra perspectiva del concepto de sistema complejo y su uso en las Ciencias Sociales, conviene desenmascarar algunas falsas verdades que alguna versión del sentido común podría aceptar. La primera es la idea de que los sistemas sencillos se han de comportar de manera sencilla. Esa es una idea mecanicista fácilmente rebatible por la gran variedad de modelos sencillos que exhiben comportamiento complejo. Esto es hoy bien entendido desde la perspectiva del estudio del caos en sistemas dinámicos sencillísimos. La segunda falsa verdad es la idea complementaria de que el comportamiento complejo obedece a causas

complejas, idea que implica una renuncia a entender la realidad que nos circunda y puede considerarse acientífica. El hecho es que hay comportamientos complejos que son descritos con ingredientes muy sencillos y que un modelo muy complicado no es necesariamente más cercano a la realidad ni da un grado de entendimiento mayor. Por último está la otra falsa verdad de que sistemas distintos se comportan de forma distinta. Ello está cerca de un cierto oscurantismo resultado de una superespecialización y parte de la idea de que para entender el comportamiento de un sistema es necesario entender todos y cada uno de los detalles de sus ingredientes (*reduccionismo*), por lo que ese entendimiento no es útil para quien esté interesado en otro sistema. El error proviene de considerar que todas las variables son relevantes en el comportamiento de un sistema, mientras que de hecho hay variables irrelevantes y comportamientos de tipo universal en sistemas muy distintos. Ese es el concepto de *universalidad* introducido en los años 70 en el estudio de los fenómenos críticos. Los fenómenos críticos son un aspecto particular de los cambios de fase¹ y son el paradigma físico de un comportamiento colectivo en el que todas las moléculas de una sustancia “colaboran” para obtener un cambio observable a nivel macroscópico.

Fenómenos colectivos

Conviene también indicar algunas características generales del comportamiento complejo asociadas al estudio de sistemas con muchas partes elementales que interactúan y dan lugar a un comportamiento colectivo, como es el caso de las estructuras sociales compuestas de individuos. Entre estas características está el que el comportamiento global no es reducible a la suma de las partes del sistema o al comportamiento típico o promedio de un constituyente del sistema. Como ejemplos puede indicarse que el comportamiento global de una sociedad no es reducible (visión reduccionista) a la psicología individual de sus componentes, cuyas características individuales detalladas pueden llegar a ser irrelevantes para el comportamiento colectivo. En segundo lugar, el comportamiento complejo se refiere a una situación intermedia entre un estado bien ordenado y un estado totalmente desordenado. Por ejemplo, el crecimiento y organización espacial de una ciudad representa una situación intermedia entre una distribución aleatoria y una que siga las pautas con que se organiza un asentamiento militar. La razón es que los propios ciudadanos se autoorganizan en el desarrollo de la ciudad. De hecho, la observación y el sentido común sugieren que la mayoría de los fenómenos que ocurren en la escala de las actividades diarias humanas muestran un balance delicado entre orden y desorden, dándoles un status que es intermedio entre la rigidez de un orden estático perfecto y el azar describible por un proceso aleatorio, lo que provoca en el observador la idea intuitiva de "complejidad". Esa situación de competición persistente y compromiso entre orden y desorden entrelazados se da cerca de los umbrales de cambio de comportamiento. La consecuencia más importante de esa situación entre orden y desorden, bien caracterizada en el estudio de los puntos críticos en las Ciencias Físicas (Guinea et al., 2003), es la aparición de comportamiento autosimilar, con invariancia de escala y características universales. El que un sistema autoorganizado tenga invariancia de escala implica que su

¹ En su sentido original un cambio de fase se refiere al cambio de un estado a otro de la materia, como por ejemplo cuando hierve el agua pasando de líquido a gas o cuando se funde el hielo pasando de sólido a líquido. Más en general un cambio de fase indica una transición entre dos estados con distinto grado de orden en el mismo sistema. El orden viene medido por un “parámetro de orden” como se discute en detalle en la sección 2.

funcionamiento no viene constreñido a un tamaño óptimo, sino que puede funcionar igualmente a medida que se van agregando nuevos elementos, como típicamente sucede en el desarrollo de una estructura social. El concepto de universalidad implica que muchas veces los detalles no importan, lo que indica que el comportamiento colectivo complejo es robusto y compartido por sistemas aparentemente muy distintos.

El estudio de los fenómenos colectivos es el prototipo de estudios de fenómenos complejos. Al mismo tiempo, el problema de la relación entre las partes y el todo es ubicuo en las Ciencias y ciertamente muy antiguo. Ya Platón en el Libro de la Ciencia plantea la cuestión de la diferencia entre el todo como la suma de las partes y el todo como una entidad única que emerge de las partes y es distinto del agregado de las mismas. Esta puede ser una de las primeras reflexiones sobre lo que hoy conocemos como fenómenos emergentes. D. Watts (2003) cita como un ejemplo más moderno de emergencia en las Ciencias Sociales a las ideas de Hari Seldon, el protagonista fundador de la Psicohistoria en el famoso libro *Fundación* de I. Asimov (1995). El matemático Seldon es un científico peligroso por sus ideas innovadoras fuera de las disciplinas establecidas y por tanto desterrado a un planeta remoto en los confines del imperio. La base de su *Psicohistoria* es que, aunque el comportamiento individual sea inescrutable e impredecible, es posible analizar y predecir el comportamiento de colectivos y sociedades grandes e, incluso, el de las civilizaciones. Un contrapunto más reciente a estas ideas es la argumentación (Surowiecki, 2004) de que un colectivo grande suele dar apreciaciones más fiables de la realidad que la de expertos individuales.

Paralelamente en el tiempo al gran desarrollo de los estudios de fenómenos cooperativos en Física en los años 1970 (Guinea et al., 2003), los sociólogos abordaban los mismos problemas conceptuales, que en ese contexto recibieron el nombre de problema “micro-macro” (Schelling, 1978). En el famoso artículo original de T. Schelling sobre segregación racial en Estados Unidos (Schelling, 1971) se dice “*Este trabajo se refiere a los mecanismos que trasladan el comportamiento individual desorganizado en resultados colectivos*”. La misma frase podría pertenecer a cualquier artículo sobre fenómenos críticos en una revista de Física de la misma época. Schelling va más allá en su intuición sobre lo que hoy llamaríamos universalidad y variables irrelevantes al plantear [op. cit. cap. 2] que hay una clase de proposiciones importantes “...*que son verdad para el agregado pero no en detalle, y que son verdad independientemente de cómo se comporta la gente*”. El problema sociológico en general es entender cómo el comportamiento colectivo humano emerge de las motivaciones individuales de las personas. Ejemplos son las modas, el “comportamiento en rebaño” que lleva a la creación de burbujas en mercados financieros, cómo se llega a decisiones colectivas a partir de información local de cada individuo, cuándo las algaradas de unos pocos revoltosos iniciales llegan a transformaciones sociales mayoritarias, etc. Estos ejemplos, que incluyen también los de formación de opinión colectiva, diseminación cultural (Axelrod, 1997a, 1997b) y otras formas de influencia social (Latane et al, 1994), ilustran el paradigma de la posibilidad de la emergencia de un consenso social como alternativa a la consolidación de estados polarizados con coexistencia de distintas opciones sociales.

Redes

Un ingrediente importante para entender la emergencia de un consenso o polarización social es la red de interacciones sociales que da soporte y determina las interacciones entre individuos que participan del fenómeno colectivo. En este punto hay que mencionar lo que ha sido una de las mayores innovaciones científicas de finales del siglo XX y que ha venido en llamarse Ciencia de las Redes Complejas (Watts 2003, Barabasi 2002). Esta nueva ciencia, aunque mayoritariamente desarrollada por científicos procedentes del campo de la Física, tiene por objeto el estudio de estructuras sociales: Trata de la gente, de las relaciones de amistad, de rumores, culturas, enfermedades, comunicación electrónica, crisis financieras, apagones eléctricos, aeropuertos colapsados, organización empresarial o terrorista, colaboraciones científicas, relaciones sexuales, etc. En la “era conectada” (Watts, 2003) vivimos inmersos en redes de todo tipo que conectan objetos en formas diversos y que condicionan y determinan cómo opera el conjunto de esos objetos. Tradicionalmente tales redes se trataban, fundamentalmente desde el mundo de la Socioeconomía y la Biología, como aleatorias. Esto es, que cualesquiera dos objetos están conectados con igual probabilidad. Simultáneamente los físicos basaban la gran mayoría de sus estudios de objetos en interacción en modelos en que esos objetos forman los nodos de una red regular en la que interaccionan con sus “vecinos” o elementos más próximos.

Tres hechos han revolucionado esta situación y llevado a la Ciencia de Redes Complejas: a) El reconocimiento explícito y cuantitativo en base a análisis de datos de que las redes sociales tienen propiedades topológicas distintas por igual de las redes aleatorias que de las regulares. b) La constatación de que las mismas propiedades aparecen de manera ubicua y universal en redes de objetos tan distintos como las redes de alimentación, las de colaboración científica o Internet. c) El desarrollo de modelos simples que permiten reproducir esas propiedades topológicas de las redes complejas y entender su origen.

Entre esas propiedades destacan la de “pequeño mundo” y la “libre de escala”. La propiedad de “pequeño mundo” indica que con pocos pasos entre objetos intermedios pueden conectarse cualesquiera dos objetos de la red. En el contexto social esta propiedad fue puesta de manifiesta en el famoso experimento de Milgram (1967) en el que se pedía a individuos elegidos arbitrariamente que enviaran cartas a un conocido suyo para que éste las dirigiera a alguien que considerara más próximo a una persona fijada de antemano y sin un vínculo directo con los individuos que originaban la cadena. Dicha persona resulta ser alcanzable en promedio por 6 pasos intermedios de envíos de cartas.

Las redes de pequeño mundo, que fueron popularizadas por Watts y Strogatz (1998), pueden obtenerse a partir de una red regular en la que cada nodo tiene el mismo número de enlaces (véase la figura 1). Se elige al azar un nodo de la red y con probabilidad p se elimina uno de sus enlaces y se sustituye por otro enlace con otro nodo elegido también al azar. Esto se repite para cada uno de los nodos, generando enlaces de largo alcance entre nodos que en la red original eran distantes geográficamente y ahora pasan a ser vecinos. Por definición, vecinos son los nodos conectados por un enlace. Para $p=0$ tenemos la red regular y en el extremo de $p=1$ se recupera una red aleatoria. Para valores intermedios de p se dan las redes de

pequeño mundo, con una distancia media entre nodos pequeña (medida en unidades de número de enlaces), como sucede para redes aleatorias y no sucede para redes regulares, pero simultáneamente con grupos de nodos compactos como sucede en las redes regulares y no sucede en las aleatorias.

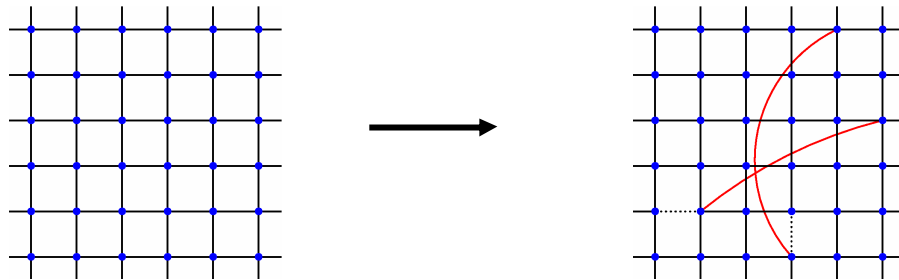


Figura 1: Proceso de construcción de una red de pequeño mundo.

Las redes “libres de escala” (Barabási y Albert, 1999) tienen como característica principal que la distribución de probabilidad del número de enlaces de cada agente no tiene un valor típico bien definido (una “escala” característica), sino que se extiende hasta valores muy grandes del número de enlaces. Más concretamente, la probabilidad de que un nodo de la red tenga K enlaces es inversamente proporcional a la potencia K^γ , siendo γ un exponente característico de la red, lo que indica que hay un número pequeño de nodos que tiene un número de enlaces muy alto (“hubs” en la terminología inglesa). Es decir, hay individuos muy bien conectados socialmente y cabe preguntarse por el efecto de esos nodos con muchos enlaces en la dinámica colectiva del sistema. Esto es diferente a lo que sucede en las redes de pequeño mundo para las que la misma distribución de probabilidad tiene forma exponencial $\exp(-K/\lambda)$, siendo λ precisamente la escala característica de la que carecen las redes libres de escala y donde no pueden identificarse agentes sensiblemente mejor conectados que la media.

Aunque no está demasiado claro si las redes sociales presentan una distribución libre de escala, se han encontrado todo tipo de sistemas biológicos y tecnológicos (enlaces directos entre aeropuertos, cableado eléctrico, la red de conexiones de Internet, etc.) con esta propiedad. Dentro de la gran variedad de procesos que conducen a leyes libres de escala, el prototipo es el introducido por (Barabási y Albert, 1999). La red se construye de una manera dinámica: va creciendo a medida que se agregan nuevos nodos. El procedimiento es tal que un nuevo nodo se enlaza con un número predeterminado de nodos ya existentes de manera, y esta es la característica especial, que se enlaza con mayor probabilidad con los nodos que ya tienen muchos enlaces. Concretamente, la probabilidad de crear un enlace con un nodo existente es proporcional al número de enlaces K que este nodo ya tiene. Se puede demostrar que este proceso conduce a una distribución de enlaces con el exponente $\gamma=3$, que es bastante cercano a los valores medidos en alguna de las redes tecnológicas mencionadas con anterioridad. Un aspecto típico de una red construida según las reglas de Barabási y Albert se muestra en la figura 2.

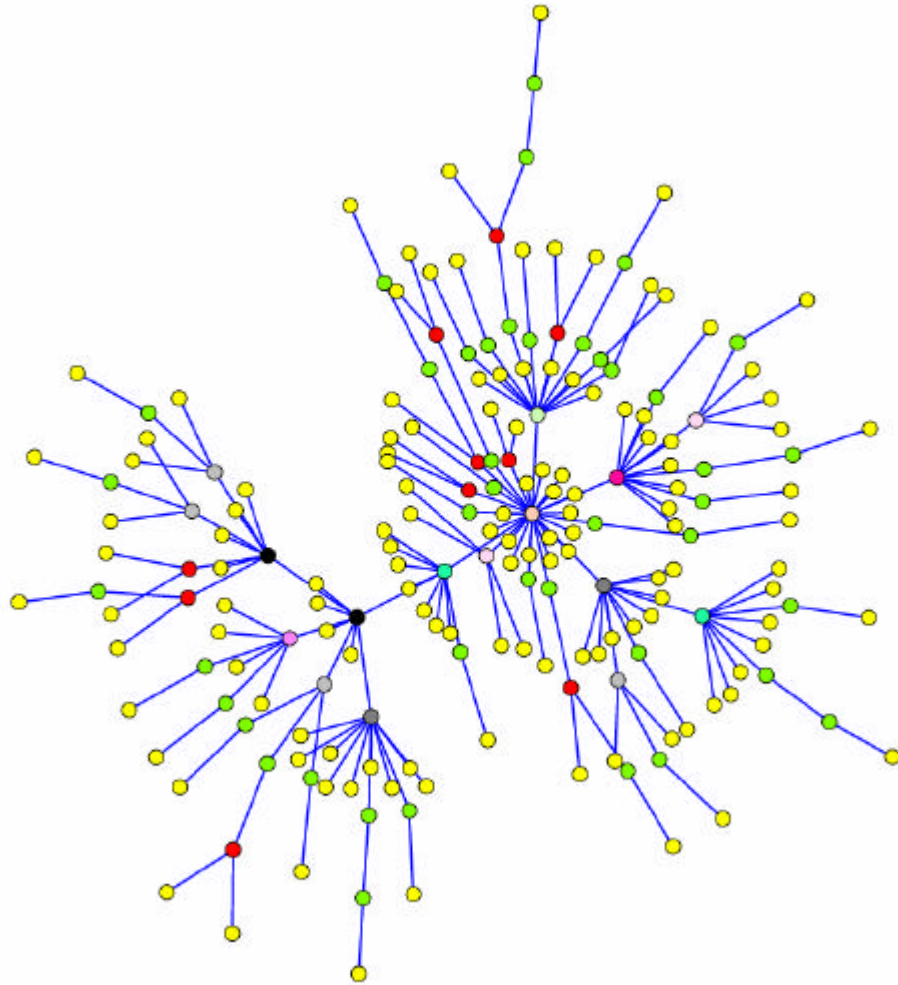


Figura 2: Aspecto típico de una red libre de escala.

Hemos argumentado que las interacciones posibles entre individuos que originan un fenómeno colectivo vienen determinadas por la red que define las relaciones sociales entre ellos. En la siguiente sección y como ejemplo de la importancia de los efectos de esta red, discutimos cómo la convergencia hacia una globalización en un modelo de difusión cultural (Axelrod 1997a) viene profundamente afectada por el tipo de red (Klemm et al, 2003, 2004). Ahora bien, la estructura de la red no está dada y determinada para siempre como una realidad externa sino que, de la misma manera que las acciones de los individuos vienen afectados por esa red, la red es creada por las acciones de los individuos, de manera que hay una co-evolución de la red y las acciones de los individuos (Lazer 2001). Por tanto, una pregunta alternativa al efecto de una red dada en un fenómeno colectivo, es de qué manera se crea la red como resultado del fenómeno colectivo. Como ejemplo de creación de una red estudiamos en la Sección 3 el comportamiento gregario de agentes en un mercado financiero y la red social a la que da lugar (Eguíluz y Zimmerman, 2000).

2. Globalización cultural en redes complejas

Axelrod (1997a, 1997b) abordó la cuestión de la persistencia de la diversidad cultural planteando la siguiente pregunta: Si cuando las personas interactúan y se relacionan tienden a hacerse más parecidas en sus creencias, actitudes y comportamientos, ¿por qué no desaparecen con el tiempo las diferencias culturales? Para responder a esta pregunta introdujo un modelo que permite explorar los mecanismos de competición entre la globalización y la persistencia de la diversidad cultural. El modelo de Axelrod considera una serie de agentes (que pueden ser individuos o incluso sociedades completas) que, mediante sus interacciones sociales, intercambian pareceres y llegan a establecer una serie de rasgos o atributos comunes. La conclusión más importante del modelo es que, aunque las reglas de evolución sean tales que dos agentes concretos, mediante su interacción, tienden a converger en sus rasgos culturales, la evolución conduce generalmente a un estado globalmente multicultural. Es decir, no se alcanza la uniformidad cultural a pesar de los mecanismos convergentes. Hablamos de polarización cuando no se produce una globalización cultural y las diferencias culturales persisten como fenómeno colectivo. Describiremos brevemente a continuación los ingredientes esenciales del modelo para pasar a continuación a ver el papel que desempeña el tipo de red de interacciones sociales en algunas de sus propiedades.

Cabe primero definir qué entendemos por “cultura”. En el modelo de Axelrod una cultura está compuesta por una serie de elementos llamados “rasgos culturales”, en un número finito (que llamaremos F) y no excesivamente elevado. Ejemplos de tales rasgos pudieran ser el lenguaje, la religión, los gustos musicales, la opción política, etc. Es fundamental el que estos rasgos culturales puedan ser modificados mediante las interacciones sociales. Así, la raza, el color de la piel u otras características físicas no son considerados como rasgo cultural en este modelo. Una novedad del modelo de Axelrod consiste en considerar que los rasgos culturales no son necesariamente binarios, no toman solamente una de dos opciones, que era una hipótesis adoptada usualmente en otros modelos de evolución cultural. Así, los individuos no son necesariamente de derechas o de izquierdas, del Real Madrid o del Barcelona, de campo o de montaña, sino que se permite que cada uno de los F rasgos culturales pueda adoptar un valor escogido de entre un número q de posibles opciones. Aunque sería razonable pensar que este número de opciones depende del rasgo cultural considerado, el modelo de Axelrod hace la simplificación de que el número de posibilidades es igual para cada uno de los rasgos. Para concretar, el individuo i -ésimo ($i=1\dots N$) viene representado por un vector $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{iF})$, donde σ_{ij} es una variable que toma valores $(0, 1, 2, \dots, q-1)$. Por ejemplo, si el segundo atributo ($j=2$) representa la religión y $q=3$, entonces $\sigma_{52}=0$ representa que el individuo número 5 es cristiano, $\sigma_{52}=1$ que es musulmán y $\sigma_{52}=2$ que es judío. Una cultura se define como un conjunto de valores para cada uno de los rasgos culturales, y existen, por tanto, q^F posibles culturas.

Otro ingrediente novedoso en el modelo de Axelrod, aparte de tratar a la cultura como un hecho multidimensional, es que la dinámica considera la interacción entre los distintos rasgos culturales de dos agentes que se consideran vecinos. El concepto de vecindad, a la vista de la introducción sobre redes, ha de considerarse en un sentido amplio y dos agentes son vecinos si existe entre ellos un enlace directo en la red de relaciones sociales. La premisa básica del modelo de Axelrod es

que la interacción entre agentes hace que uno de ellos cambie uno de sus rasgos al valor que tiene el otro agente. Más concretamente, la probabilidad de que un agente cambie uno de sus rasgos culturales al valor de uno de los vecinos es proporcional al número de rasgos culturales que ya son iguales con ese vecino. En esta regla está implícito que si dos agentes no comparten ningún rasgo cultural, no se producirá ningún acercamiento entre ellos. Este criterio de similitud para la influencia social es un ejemplo de la teoría de comparación social en la que cada individuo está influenciado por otros similares. El resultado principal enfatizado por Axelrod es que su modelo ilustra cómo este mecanismo de convergencia local genera eventualmente una situación multicultural en la que existen regiones culturales, dominios cuya población comparte todos los mismos rasgos culturales, pero que no comparte ninguno con los de las regiones vecinas.

Un ejemplo de la regla dinámica del modelo de Axelrod se da en la figura 3. Consideramos que existen $F=3$ rasgos culturales cada uno de los cuales puede tomar $q=10$ valores. El estado de uno de los agentes es $(0,0,7)$ y el de su vecino $(5,9,7)$, de manera que comparten uno de los tres posibles rasgos (el tercero, concretamente, con un valor de 7). Consiguientemente, con probabilidad $1/3$ uno de los dos rasgos no comunes se modificará para hacerlo igual entre los dos vecinos. En este ejemplo, el valor 0 del primer rasgo del primer agente toma el valor 5 del primer rasgo del segundo agente. Esta regla se repite eligiendo al azar la pareja de agentes vecinos que interaccionan en un momento dado. La figura 4 muestra un ejemplo de la evolución que se sigue de esa regla para N agentes que ocupan los nodos de una red regular cuadrada. Al principio se parte de una situación lo más heterogénea posible en la que cada agente adopta unos valores para los rasgos culturales aleatorios (panel izquierdo) y completamente independientes de los que adopten el resto de los agentes, incluidos sus vecinos. La evolución lleva a un estado de polarización cultural final en que no hay ninguna pareja de vecinos que, de acuerdo con las reglas establecidas, puedan cambiar sus rasgos culturales.

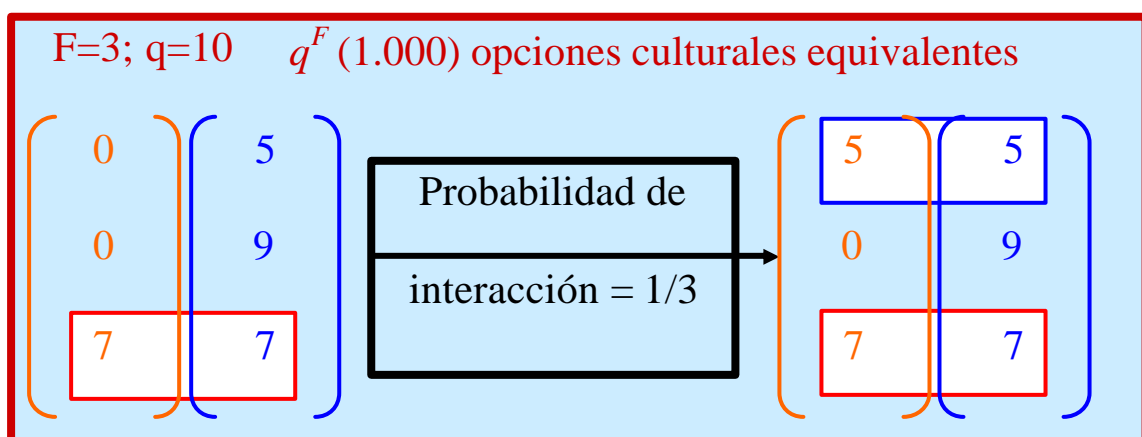


Figura 3: Ejemplo de las reglas dinámicas de evolución en el modelo de Axelrod.

Hay dos situaciones en las que las reglas dinámicas no puede conducir a ninguna modificación de los rasgos culturales: cuando los vecinos ya comparten todos los rasgos (máximo solapamiento) no es posible ninguna acción; y cuando los vecinos no comparten ningún rasgo (solapamiento nulo) no hay ninguna posibilidad tampoco de acercamiento entre ellos. Un enlace entre dos vecinos en el que el solapamiento entre rasgos no es nulo ni completo, se llama un enlace “activo”. Una situación sin enlaces activos, una situación congelada desde el punto de vista dinámico, puede estar formada por agentes que comparten todos los rasgos (un único dominio cultural o globalización) o bien organizada en dominios culturales que no comparten ningún rasgo entre agentes de dominios vecinos (polarización cultural).

Las simulaciones del modelo de Axelrod ilustran cómo el mecanismo de convergencia local usado en la regla de dinámica cultural, puede generar polarización como resultado colectivo. En una evolución típica la dinámica queda congelada en un estado multicultural en el que coexisten dominios geográficos de culturas diferentes². Es interesante indicar que es precisamente el criterio de similitud el que conduce a la polarización cultural y frena la evolución hacia un estado de cultura global. De hecho, si el criterio de similitud no se usa para pesar la probabilidad de una interacción, y ésta se produce independientemente de lo distintos que sean los individuos vecinos, el sistema siempre alcanza el estado de cultura global uniforme.

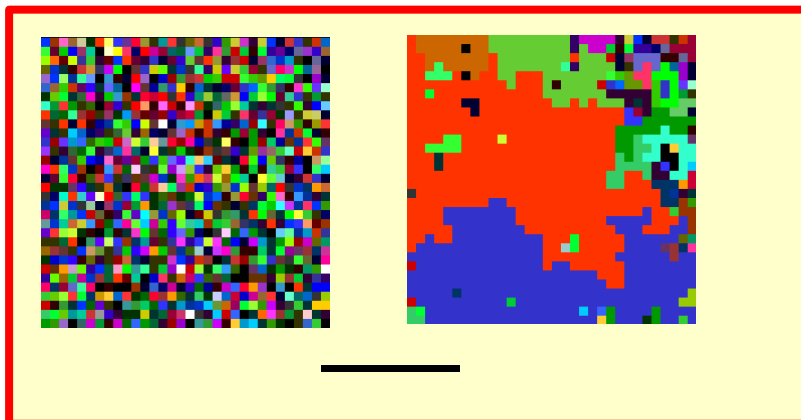


Figura 4: Evolución típica del modelo de Axelrod. El panel izquierdo representa una condición inicial aleatoria y el derecho el estado final con coexistencia de dominios de distintas culturas.

El número de distintas regiones culturales es una medida de la diversidad cultural de la población. Podría pensarse que una medida cuantitativa de la diversidad cultural se obtiene contando sencillamente el número de regiones culturales. Este número podría oscilar entre un valor mínimo de 1 y un valor máximo de q^F . Sin embargo, esta medida no es conveniente porque no tiene en cuenta el tamaño de cada región

² En la página web www.imedea.uib.es/physdept/eng/lines/social.html existe un enlace donde se puede ver en tiempo real la evolución de una simulación del modelo de Axelrod y donde es posible cambiar los parámetros de manera interactiva.

cultural, es decir el número de agentes que la forman. Una medida más conveniente para cuantificar la diversidad cultural identifica primero el mayor dominio cultural. La diversidad se define como la proporción de agentes respecto a la población total que forman ese mayor dominio cultural. Si S_{\max} es el tamaño del mayor dominio, la diversidad (realmente, la falta de diversidad) se define como S_{\max}/N . Este número oscila entre un valor máximo de 1 para un único dominio hasta un valor mínimo $1/N$ en el caso de que todos los dominios estén formados por un solo agente. El valor de S_{\max} no queda unívocamente determinado dando los parámetros q , F , N y una red de vecinos. Dado que en las reglas dinámicas hay una componente probabilística, puede ocurrir que simulaciones distintas con los mismos parámetros den lugar a un valor diferente de S_{\max} . Es por ello que uno debe calcular el valor promedio $\langle S_{\max} \rangle$ sobre muchas realizaciones del modelo. Al cociente $\langle S_{\max} \rangle / N$ se le denomina “parámetro de orden” de este sistema.

El nombre “parámetro de orden” es ampliamente utilizado por los físicos en el estudio de los cambios de fase. Si pensamos en el agua pura, ésta puede existir en diferentes estados o fases: líquida, sólida y gaseosa. El paso de un estado a otro se realiza de manera repentina y abrupta cuando variamos su temperatura. Por ejemplo, el agua es líquida hasta que enfriamos a cero grados centígrados cuando, sin previo aviso ni modificación estructural previa observable, se congela y pasa a ser hielo. La fase hielo es una fase cristalina donde las moléculas del agua están dispuestas de manera regular. La fase líquida, por otra parte, es amorfa ya que las moléculas de agua no tienen ninguna posición predeterminada. La diferencia entre la fase líquida y sólida está en el “orden” de las moléculas: ordenadas en la fase sólida y desordenadas en la fase líquida. Nos llevaría demasiado lejos dar todos los detalles del proceso, pero en cambios de fase se define un parámetro de orden como característico de las fases: un valor cercano a 1 indica una fase muy ordenada, mientras que un valor cercano a 0 indica una fase desordenada (la líquida y también la gaseosa de nuestro ejemplo). Lo importante es que en muchos cambios de fase el parámetro de orden cambia de manera abrupta justo en el punto de transición (cero grados centígrados en el caso del cambio sólido-líquido del agua).

Algo parecido pasa en el modelo de Axelrod en lo que respecta al comportamiento del parámetro de orden (la proporción de agentes que están en el estado cultural de mayor tamaño). Un estudio numérico detallado por parte de Castellano et al. (2000) del modelo de Axelrod en una red cuadrada en un plano muestra la existencia de un cambio de fase que se produce al variar los números q y F . Las dos fases son la homogénea, monocultural o de globalización cultural (con un valor del parámetro de orden cercano a 1) y la heterogénea, multicultural o de polarización cultural, con un parámetro de orden cercano a 0. Si fijamos el valor de F , el cambio de fase se produce al variar q , de manera que para valores de q inferiores a un cierto valor q_c (denominado “crítico”) entonces hay dominio de una única cultura, mientras que para valores de q superiores a q_c es el estado multicultural el que domina. Esta conclusión de Castellano et al. nos dice que los mecanismos de convergencia local sólo son eficientes para q menor que q_c , mientras que el estado de polarización preconizado por Axelrod como característico de su modelo, sólo persiste para q mayor que q_c . Esto modifica parcialmente las conclusiones originales de Axelrod, en el sentido de que el estado final de globalización o polarización es determinado por el valor de q . De hecho, q mide el grado inicial de desorden en una evolución que empieza con una distribución aleatoria de los valores para cada atributo cultural de cada individuo.

La pregunta que ahora planteamos es cómo estos resultados de globalización o polarización cultural en el modelo de Axelrod vienen modificados por el tipo de red social que define quién es vecino de quién (Klemm et al. 2003). El propio Axelrod indica en su trabajo original (Axelrod 1997a,1997b) que las comunicaciones electrónicas (Internet) permiten desarrollar unas redes de interacción que son elegidas por los individuos en vez de impuestas por la geografía, e indica que con interacciones a larga distancia la heterogeneidad sostenida por las interacciones locales puede desaparecer. Deja este autor esta cuestión como un tema de posterior análisis, que abordamos aquí considerando dos tipos de red de interacción, la red de “pequeño mundo” y la red “libre de escala” discutidas en la sección anterior.

Los resultados de simulaciones del modelo de Axelrod en una red de pequeño mundo para $F=10$ y $N=250.000$ individuos se resumen en la figura 5 donde dibujamos la dependencia del parámetro de orden $\langle S_{\max} \rangle / N$ con el parámetro q para tres valores distintos de la probabilidad p que define la red de pequeño mundo. Para cada valor de p encontramos que el parámetro de orden cambia abruptamente de un valor cercano a 1 para $q < q_c$ a un valor cercano a 0 para $q > q_c$, la signature de un cambio de fase. En cada caso, el valor crítico q_c separa los estados ordenados (globalización) de los desordenados (polarización). Nótese que el valor de q_c aumenta a medida que p aumenta.

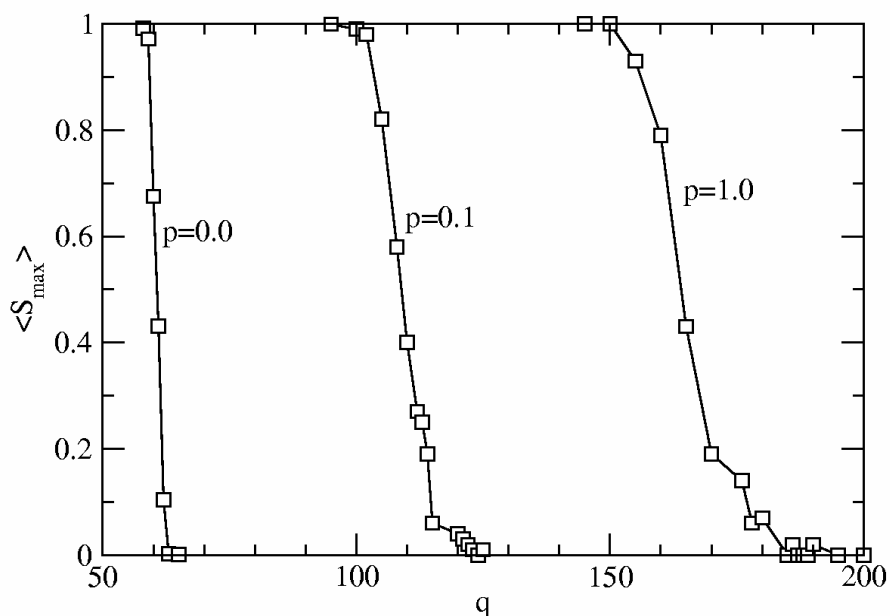


Figura 5: Parámetro de orden del modelo de Axelrod en una red de pequeño mundo para distintos valores de la probabilidad p de recableado de los enlaces en la red.

Estos resultados se pueden apreciar mejor en la Figura 6 en la que representamos los valores de la pareja (q,p) que separan las regiones de estados culturalmente homogéneos de heterogéneos. Este tipo de gráficas se denominan diagramas de fase y se utilizan asiduamente en física para representar las regiones de existencias de, por ejemplo, las fases líquida y sólida de una sustancia en función de la temperatura, presión, densidad, etc. Lo que vemos es que la transición ocurre para

valores de q superiores a medida que aumentamos el parámetro p y nos separamos de una red regular hacia la red aleatoria. Ello indica que si para un cierto grado inicial de multiculturalidad, medido por el parámetro q , el sistema termina en un estado polarizado culturalmente, aumentando el número de enlaces de largo alcance, medido por el parámetro p , el sistema sufre una transición al estado de cultura global. En otras palabras, la conectividad de la red de pequeño mundo favorece la aparición de la globalización cultural, lo que está de acuerdo con nuestra intuición sobre el efecto de los enlaces deslocalizados geográficamente.

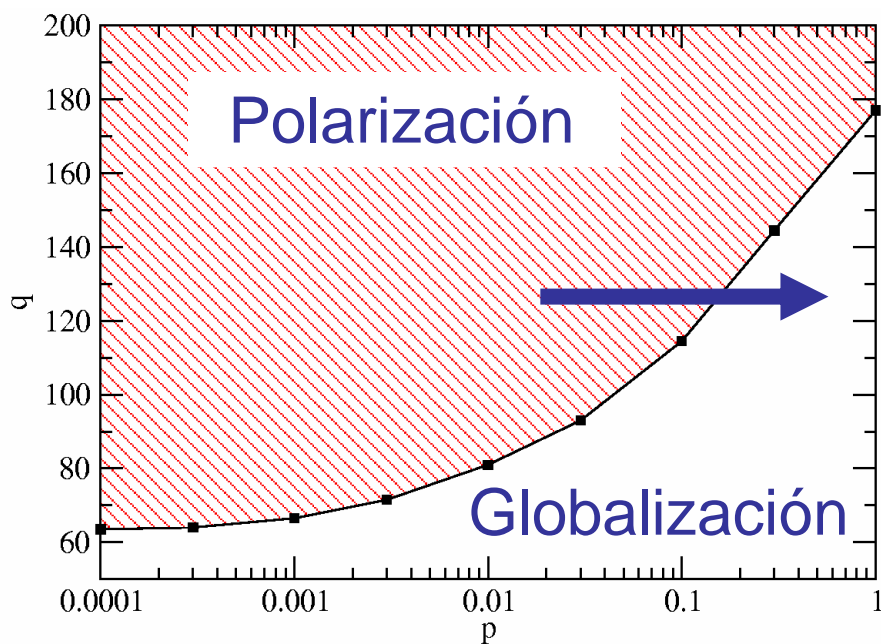


Figura 6: Diagrama de fases del modelo de Axelrod en redes de pequeño mundo.

El resultado cualitativo principal de las simulaciones del modelo de Axelrod en las redes libre de escala es que la transición entre globalización y polarización aparece para un valor del parámetro q que depende del número de individuos N en la red. Esto se observa claramente en el panel izquierdo de la figura 7 donde se representa el parámetro de orden frente a q . Puede observarse como a medida que aumenta dicho número, la curva que separa los estados de globalización ($\langle S_{\max} \rangle / N$ cercano a 1) de los de polarización ($\langle S_{\max} \rangle / N$ cercano a 0) se desplaza hacia valores mayores de q . Así, mientras que el valor crítico q_c es independiente de N (para N suficientemente grande) en las redes regulares y en las de pequeño mundo, resulta que en las redes libre de escala q_c se anula con N , de forma que la globalización prevalece siempre para sociedades con un número suficientemente grande de individuos en interacción a través de una red libre de escala.

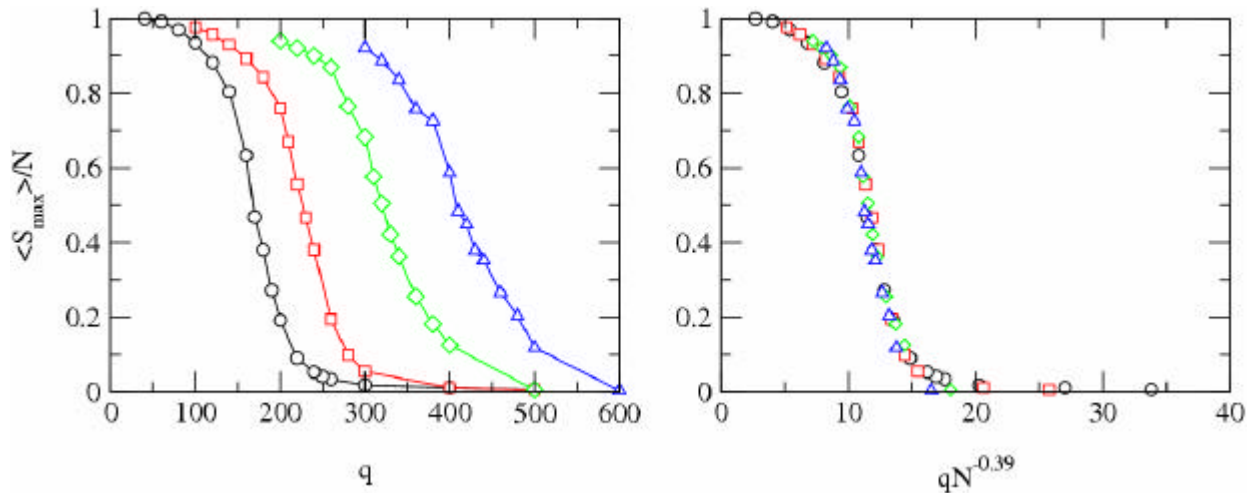


Figura 7: Parámetro de orden y su reescalamiento con el número N de agentes para el modelo de Axelrod definido en una red libre de escala del tipo de Barabási y Albert. Distintos símbolos corresponden a distintos números de agentes: círculos ($N=1000$), cuadrados ($N=2000$), rombos ($N=5000$) y triángulos ($N=10000$).

Hay una manera de analizar estos datos de manera que se vea clara cuál es la importancia cuantitativa del tamaño de la población. Un ojo de un físico experimentado en cambios de fase ve enseguida que las diferentes curvas del panel izquierdo de la figura 7 no son independientes entre sí. Es posible obtener una de ellas a partir de las demás sin más que reescalar el eje horizontal. El factor por el que se ha de reescalar este eje aumenta con el tamaño N asociado a cada curva. Tampoco le sorprenderá a un físico, por ser algo común en el comportamiento de los cambios de fase, que ese factor de escala sea proporcional a una potencia N^β del tamaño N . El panel derecho de la figura 7 indica la validez de este reescalado (lo que se denomina una “ley de escala”). La consecuencia inmediata de una ley de escala de este tipo es que se puede deducir que el valor crítico q_c crece a medida que N aumenta de manera proporcional a la potencia N^β (el valor de $\beta=0.39$ se sigue de un ajuste numérico). Es posible entender este resultado por el papel que tienen los nodos con un mayor número de enlaces. Estos nodos ayudan a la difusión de los rasgos culturales entre elementos alejados en la red, promoviendo otra vez la homogeneización cultural o globalización

El efecto de los distintos tipos de red en la transición entre globalización y polarización en el modelo de Axelrod se resume en el esquema de la figura 8 para un cierto valor de N fijo y un valor medio del número medio de enlaces por nodo también común para las distintas redes. La transición de globalización a polarización se da en las redes regulares ($p=0$) para un valor crítico q_c que es independiente del número de agentes N , para N suficientemente grande. Para una red de pequeño mundo, el valor crítico q_c , siendo todavía independiente de N , aumenta hasta llegar a su valor extremo para una red aleatoria ($p=1$). Para una red libre de escala la transición ocurre para unos valores todavía mayores de q_c , lo que indica que su conectividad la hace más eficiente que una red aleatoria para mantener una cultura global; adicionalmente, el valor crítico q_c se hace arbitrariamente grande al crecer el número de individuos N , de forma que para sociedades grandes con una red social de tipo escala libre, la globalización siempre persiste.

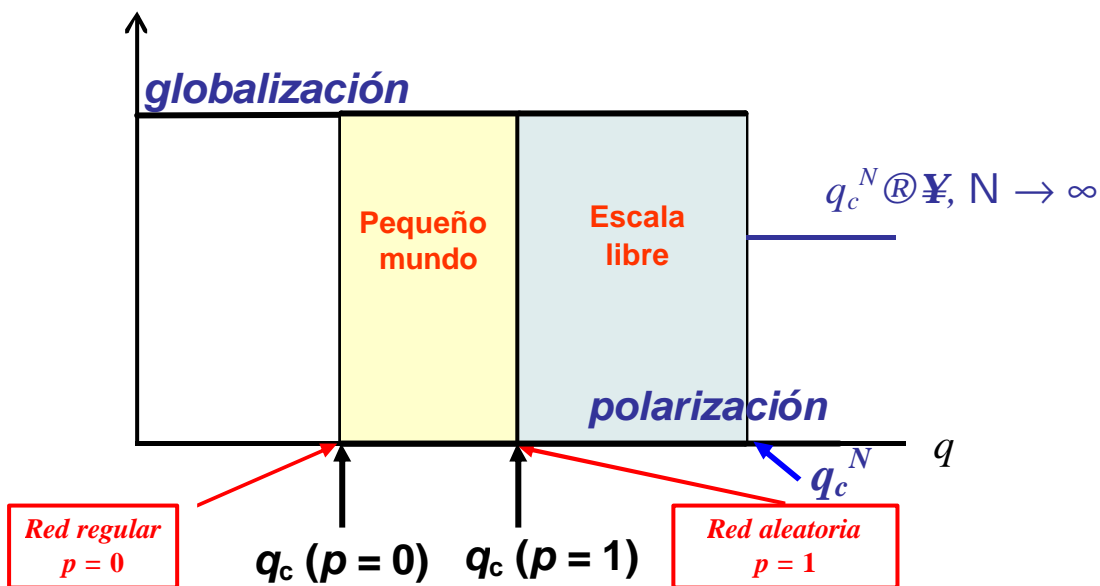


Figura 8: Resumen de propiedades del modelo de Axelrod según el tipo de red de interacciones sociales en el que está definido.

3. Formación de grupos de opinión: comportamiento gregario y transmisión de información³.

Una de las características más importantes de los sistemas sociales es que las interacciones entre los individuos ni vienen prefijadas por una autoridad central organizadora ni están fijas en el tiempo. Más bien los diversos elementos que forman el sistema se auto-organizan, rompiendo y estableciendo nuevas interacciones dependiendo de las circunstancias. Por ejemplo, normalmente se puede mantener una colaboración entre científicos siempre que ésta sea beneficiosa. Pero en cuanto uno de los integrantes deje de colaborar al nivel esperado, el resto del grupo intentará buscar nuevos aliados (Zimmermann et al 2001, Eguíluz et al 2005). Es este aspecto dinámico y auto-organizado de la red de interacciones sociales el que pretendemos explorar en esta sección. Para ello vamos a considerar un modelo para la evolución de un mercado financiero.

Los mercados financieros constituyen uno de los paradigmas en el estudio de sistemas complejos. Siendo un claro ejemplo de sistema complejo donde la interacción de los agentes que operan en Bolsa se refleja en la evolución de unos índices, ofrece la ventaja de la abrumadora cantidad de datos precisos almacenados que permite validar o desechar teorías y modelos. Uno de los problemas de gran interés es el origen y las características de las fluctuaciones de los diversos índices en los mercados financieros. Estudios empíricos sobre la distribución de las variaciones de los precios, indican que éstos no se corresponden a las obtenidas en un mercado puramente aleatorio, sino que se observa que la probabilidad de

³ Adaptado parcialmente de V.M. Eguíluz, Revista Española de Física 15, 54 (2001).

fluctuaciones grandes (las correspondientes a un “boom” o a un “crash”) es mucho más frecuente. Esto indica que en los mercados de valores los agentes no toman sus decisiones de forma aislada. Las acciones de los agentes en algunos instantes producen un fenómeno colectivo. Por lo tanto es necesario algún mecanismo que correlacione las decisiones que toman los agentes. En este contexto el “*efecto rebaño*” puede explicar la frecuencia de las grandes fluctuaciones debido a la formación de grupos.

Presentamos un modelo muy simplificado de interacción de agentes en un mercado financiero. Modelo que se nos permitirá llamar “la Bolsa de Palma”. Este modelo incorpora dos aspectos fundamentales de los mercados: el *comportamiento gregario* y la *transmisión de información* (Eguíluz, Zimmermann 2000). Por un lado, el comportamiento gregario, la imitación, en suma, es la base de uno de los mecanismos más sencillos de aprendizaje en el que cada individuo observa lo que hacen sus vecinos alrededor para posteriormente imitar su comportamiento, de igual manera que hay imitación cultural por interacción en el modelo de Axelrod discutido en la sección anterior. Por ejemplo, a la hora de decidir qué película ver o qué regalo comprar, muchas veces uno se ve influenciado por lo que otros han hecho, cuánta gente ha visto la película o ha comprado el objeto. En el caso particular de la Bolsa, el comportamiento gregario puede ser debido, por ejemplo, a agentes (“brokers”) que, usando las mismas herramientas para analizar los distintos activos, observan las mismas tendencias; a agentes que siguen rumores que se propagan en el parque; a grandes transacciones que inducen a otros agentes a seguir la misma acción; a inversores que operando desde su casa siguen las sugerencias de la sección financiera de su matutino; etc. Por otro lado, la transmisión de la información, la comunicación entre agentes (incluyendo rumores), en suma, es algo esencial en el funcionamiento de un mercado financiero. Nuestro sencillo modelo para la Bolsa de Palma, considera que existe una propagación aleatoria de la información.

En la Bolsa de Palma hay N agentes, cada uno de los cuales tiene, en un instante de tiempo, varias opciones: puede decidir comprar, vender, pasar la información que tiene a otro agente, o no hacer nada. Las órdenes de compra o venta se efectúan sobre un único valor cotizado, llamado VAL. La transmisión de información entre agentes hace que se formen grupos de distintos tamaños que comparten la misma información. Es de esperar que cuando un agente dentro del grupo toma una decisión de comprar o vender, ésta sea imitada por los demás miembros del grupo (el llamado efecto rebaño o comportamiento gregario) convirtiéndose en un líder espontáneo. Suponiendo que todos los agentes invierten la misma cantidad de dinero, el tamaño de la orden (de compra o de venta) será proporcional al tamaño del grupo. Por lo tanto cuanto mayor es el grupo, mayor es la variación que experimenta el valor.

Vamos a ser más precisos y dar las reglas concretas de evolución de la Bolsa de Palma. Al valor de VAL en un tiempo t lo llamaremos $P(t)$. Inicialmente, $t=0$, todos los agentes están aislados, desconectados entre sí, sin ningún enlace establecido entre ellos: la red de conexiones sociales aún no existe. En un instante de tiempo t dado un agente j es seleccionado al azar de entre los N agentes y el tiempo se considera que aumenta en una unidad $t \mapsto t+1$. Este agente puede hacer dos cosas: (i) establecer un enlace con otro agente, elegido siempre al azar; (ii) decidir comprar o vender el valor VAL.Cuál de las dos acciones se toma es un proceso aleatorio en el

que la opción (ii) tiene una probabilidad que llamaremos a (dentro de esta opción las probabilidades de comprar o vender son ambas de $\frac{1}{2}$).

Si se ha elegido la opción (i), el nuevo enlace desempeña el papel de transmisor de la información y el grupo crece con la adición del nuevo miembro (y de todos aquellos que también estuvieran conectados con él).

Si se ha tomado la opción (ii) todo el grupo al que pertenece el agente j hace la misma acción (comprar o vender) que el agente j . De acuerdo con lo explicado anteriormente, el valor de VAL cambia según el tamaño del grupo. Si $S(t)$ es el tamaño del grupo en el tiempo t considerado y los agentes deciden comprar, el nuevo valor de VAL aumenta y pasa a ser $P(t+1)=P(t)\exp(S(t)/d)$; si los agentes deciden vender, el valor de VAL disminuye a $P(t+1)=P(t)\exp(-S(t)/d)$; aquí d es un parámetro llamado liquidez. Después de esta acción de compra o venta, el grupo se deshace y desaparecen los enlaces entre sus componentes.

Todo el proceso anterior se repite las veces que queramos, incrementando cada vez el tiempo en una unidad.

La característica novedosa de nuestro modelo es que la red de información crece hasta que un grupo entero de agentes actúa conjuntamente. Si no dejáramos que la red de interacciones evolucionase tendríamos comportamientos muy distintos. A modo de ilustración, veamos dos casos extremos. Si los agentes tomaran sus decisiones de qué y cuándo comprar independientemente unos de otros, el mercado fluctuaría aleatoriamente. En el lado opuesto, si todos los agentes tuvieran exactamente la misma información, esperaríamos que todos tomaran las mismas decisiones de compra y venta y las fluctuaciones serían todas del mismo tamaño. Lo que ocurre en un caso intermedio (*situación compleja*) es que se forman grupos de distintos tamaños que hacen fluctuar los precios en función de su tamaño. Notemos que en este caso, y a diferencia de los ejemplos de las secciones anteriores, la red de interacciones está formada por grupos desconectados, es decir, existen pares de agentes entre los que no se pueden comunicar siguiendo los enlaces presentes en la red, aunque es evidente que la red que se forma está lejos de ser una red ordenada.

El comportamiento que nosotros hemos modelado es gregario, donde basta que un agente cualquiera dentro del grupo tome una decisión para que ésta sea imitada por el resto del grupo. La distribución de tamaños de grupos viene controlada por la velocidad de propagación de la información. Si ésta es pequeña (valor de la probabilidad a cercano a 1) los grupos serán mayoritariamente pequeños ya que no da tiempo a formar grupos grandes; por el contrario si la velocidad de transmisión de la información entre los agentes es elevada (valor de a cercano a 0), esto da lugar a la formación de grupos grandes y a la posibilidad de producir grandes fluctuaciones.

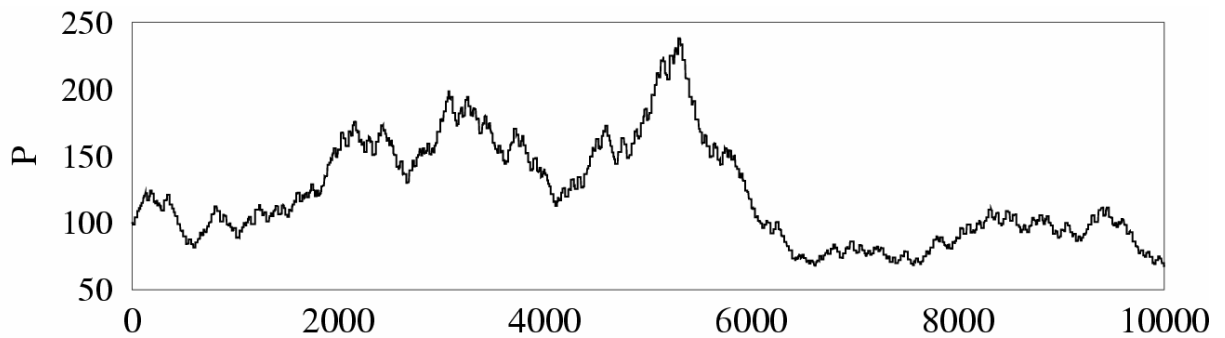


Figura 9. Serie temporal del precio $P(t)$. Número de agentes $N=10^4$, $a=0.01$ y liquidez $d=5 \times 10^4$.

A continuación presentamos resultados de simulaciones numéricas del modelo descrito anteriormente. Las simulaciones están realizadas con una población de 10.000 agentes donde se varía el parámetro a . En la figura 9 se muestra la evolución del precio P de la acción VAL partiendo de un valor inicial igual a 100, y el parámetro $a=0.01$. Las subidas y bajadas en el precio responden a la formación de los grupos: cuanto más grande sea el grupo formado, más variará el precio. Por lo tanto es fundamental conocer el tamaño de los grupos, cuya distribución se muestra en la figura 10. Lo importante de la gráfica es que la distribución no muestra un tamaño de grupo característico, es decir, la distribución no tiene un máximo para un valor del tamaño de grupo como ocurre en la distribución gaussiana o de campana, sino que sigue una ley de Pareto o potencial de la forma S^{-a} . La característica más importante es que, a diferencia de una distribución gaussiana, la probabilidad de que se forme un grupo de tamaño muy grande no es despreciable. Como indicábamos al principio de este artículo, una distribución que sigue una ley de potencias (invariante de escala) es una de los indicios que nos indican que la dinámica del sistema se encuentra en una situación entre orden y desorden característica de los sistemas complejos. Las grandes subidas o bajadas de los precios son precisamente reflejo de la presencia de grupos muy grandes.

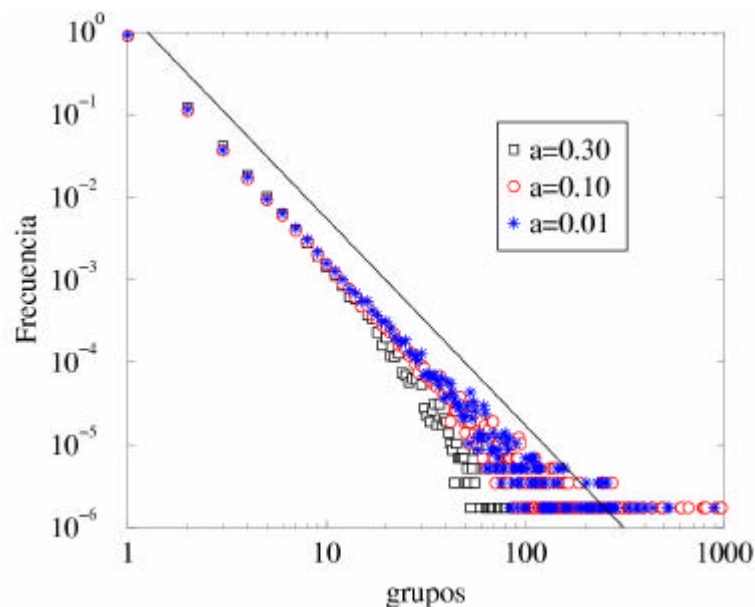


Figura 10. Distribución promedio de tamaños de grupos en escala logarítmica para los parámetros $a = 0.30, 0.10, 0.01$. Como referencia se indica una ley de potencia S^{-a} con exponente $a = 2.5$. Tiempo máximo de evolución $t=10^8$.

Por lo tanto, la hipótesis propuesta ofrece una explicación a la distribución de ganancias a corto plazo como resultado del comportamiento gregario de los agentes financieros. La intención última con esta propuesta es poner de relieve el factor social, la dinámica de las interacciones que dan lugar a la formación de grupos en la red de conexiones sociales, en los mercados financieros frente a variables puramente económicas.

3. Resumen y conclusiones.

Dentro del contexto de los sistemas complejos hemos discutido aquí dos ejemplos de cómo los fenómenos colectivos emergentes vienen condicionados por la red de interacciones sociales. Esa red es la estructura social que da soporte al fenómeno, y es a su vez una estructura compleja que es distinta por igual de una red ordenada que de una red aleatoria. En un primer ejemplo sobre la competición entre globalización y polarización cultural hemos considerado una red fija y dada a priori, mientras que en el ejemplo del comportamiento gregario en un mercado bursátil hemos considerado cómo la red de interacciones aparece y se define de forma conjunta con la dinámica del proceso colectivo.

En el primer ejemplo hemos visto que existe una transición entre globalización y polarización que depende en gran manera del tipo de red. En redes de pequeño mundo, la transición ocurre para valores mayores del parámetro que mide el grado inicial de multiculturalidad que en redes ordenadas. Es decir, la introducción de interacciones entre agentes lejanos, que no aparecen en una red ordenada, facilita la transición hacia la globalización. Es más, en redes libres de escala, donde hay agentes muy influyentes debido a que interaccionan con un número muy grande de otros agentes, el valor de transición de ese parámetro es todavía mayor y en ellas la globalización ocurre siempre para poblaciones suficientemente grandes. Por otra parte, en nuestro ejemplo del comportamiento de agentes bursátiles hemos visto como las grandes oscilaciones de los precios de un valor vienen asociadas a la formación en la red de grupos grandes de agentes que interaccionan compartiendo una opinión.

En nuestros dos ejemplos hemos utilizado modelos simples que incluyen procesos y mecanismos que parecen básicos y que nos han permitido entender fenómenos complejos de interacción social y económica. Desarrollos futuros pasan por la incorporación de nuevos elementos que doten, en principio, de más realidad a los modelos. No obstante no quiere ello decir que todos esos nuevos elementos sean esenciales para la descripción del fenómeno colectivo, ni que la inclusión de más detalles dé lugar necesariamente a una mejor comprensión. Dentro de las ideas de comportamiento universal de sistemas complejos, el trabajo a realizar es saber cuáles de esos nuevos ingredientes son relevantes y cuáles son irrelevantes. En el ejemplo de la dinámica cultural se sabe que la inclusión de la llamada deriva cultural asociada a cambios culturales aleatorios de los agentes individuales es un aspecto relevante (Klemm et al, 2004). Hay también indicios de que los efectos de los medios de comunicación son un elemento externo relevante. Queda como trabajo futuro ver si son relevantes otros aspectos como considerar que rasgos culturales distintos tienen distinto número de opciones posibles o que los rasgos culturales tienen una

jerarquía, de modo que primero se ha de coincidir en uno de ellos para poder coincidir en otros en niveles jerárquicos inferiores. Igualmente queda por estudiar esa dinámica cultural en una red no fija, sino en una red cuya estructura evolucione conjuntamente con la dinámica de interacción cultural. La aparición de distintos roles sociales (líderes, conformistas, etc.) en la evolución de una red social ha sido estudiada por Eguíluz et al (2005). En el ejemplo de los agentes bursátiles es precisamente el permitir que los agentes no sean todos homogéneos, sino que haya líderes y seguidores, uno de los ingredientes probablemente relevantes a estudiar en el futuro. También parece interesante considerar que esos agentes tengan un mecanismo de aprendizaje más complicado que la pura imitación y que pueda incluir mecanismos de optimización o características psicológicas individuales.

Agradecimientos: Agradecemos la colaboración en esos temas de K. Klemm y M. Zimmermann y la ayuda financiera de los proyectos FIS2004-00953 y FIS2004-05073-C04-03 del Ministerio de Educación y Ciencia

Bibliografía:

S. Solomon and E. Shir, *Complexity; a science at 30*, Europhysics News (marzo 2003) .

R. Dum, *Focus document: complex systems*, Comisión Europea, programa de tecnologías de la sociedad de la información (2001); *Complexity tools in evaluation of policy options for a networked knowledge society*, Comisión Europea, dirección general de la sociedad de la información (junio 2003).

P. Ball, *Utopia Theory*, Physics World (octubre 2003).

F. Guinea, E. Louis y M. San Miguel, *La ubicuidad como futuro de la física estadística y no lineal*, Revista Española de Física **17/5** (2003).

D. Watts, *Six degrees: The science of a connected age* (Norton, New York, 2003).

I. Asimov, Trilogía *Foundation* (una versión disponible en la actualidad es la de Harper Collins Publishers, London, 1995).

J. Surowiecki, *The Wisdom of crowds, why the many are smarter than the few* (Little, Brown, London, 2004)

T. Schelling, *Micromotives and macrobehavior* (Norton, New York, 1978).

T. Schelling, *Dynamic models of segregation*, J. Mathematical Sociology **1**, 143 (1971)

R. Axelrod, *The dissemination of culture*, J. Conflict Resolution **41**, 203 (1997a).

R. Axelrod, *The complexity of cooperation*, Princeton University Press (Princeton, 1997b).

B. A. Latane, A. Nowak, J. Liu, *Measuring social phenomena: dynamism, polarization and clustering as order parameters of social systems*, Behavioral Science **39**, 1 (1994).

A. Barabasi, *Linked: The new science of networks* (Perseus, Cambridge, 2002).

S. Milgram, *The small world problem*, Psychology Today **2**, 60 (1967)

K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral y M. San Miguel, *Nonequilibrium transitions in complex networks: a model of social interaction*, Physical Review E **67**, 026120 (2003).

K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral y M. San Miguel, *Globalization, polarization and cultural drift*, J. Economic Dynamics and Control (2004)

D. Lazer, *The co-evolution of individual and network*, Journal of Mathematical Sociology **25**, 69 (2001).

V. M. Eguíluz y M. G. Zimmermann, *Transmission of information and herd behavior: an application to financial markets*, Physical Review Letters **85**, 5659-5662 (2000).

C. Castellano, M. Marsili y A. Vespignani, *Nonequilibrium phase transition in a model for social influence*. Physical Review Letters **85**, 3536 (2000)

D. Watts y S. Strogaz, *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature **393**, 440 (1998).

A.L. Barabasi y R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286**, 509 (1999)

M.G. Zimmermann, V.M. Eguíluz y M. San Miguel, *Cooperation, adaptation and the emergence of leadership*, en 'Economics with Heterogeneous Interacting Agents', pp. 73-86, A. Kirman and J.B. Zimmermann (eds.), Lecture Notes in Economics, Springer (Berlin, 2001).

V. M. Eguíluz, M. G. Zimmermann, C. Cela-Conde y M. San Miguel, *Cooperation and emergence of role differentiation in the dynamics of social networks*, American Journal of Sociology **111** (nº3, 2005).